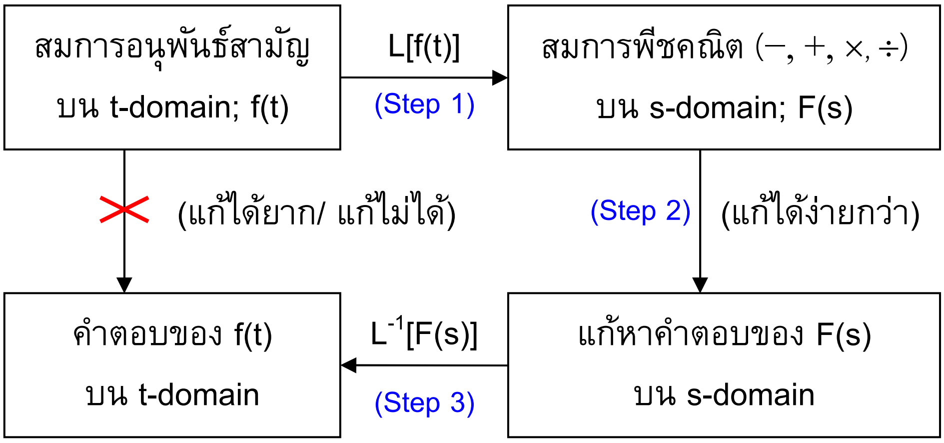
บทที่ 5
การแปลงลาปลาซ

5.1 บทนำ

จะเห็นได้ว่าการแก้สมการอนุพันธ์สามัญที่นำเสนอในบทที่ผ่านมานั้น ผู้แก้ต้องมีความเชี่ยวชาญในการอินทิเกรต การจดจำรูปแบบของคำตอบสมการ อย่างไรก็ตาม เมื่อสมการที่ต้องแก้มีรูปแบบที่ซับซ้อนมากขึ้น การแก้ก็มักมีความยุ่งยากจนถึงขั้นอาจแก้ไม่ได้ ในบทนี้จะนำเสนอวิธีการแก้สมการอนุพันธ์สามัญในรูปแบบที่สะดวกขึ้น เรียกว่า “วิธีแปลงลาปลาซ” (Laplace Transform) หลักการของวิธีนี้คือ แปลง “สมการอนุพันธ์สามัญ” (ซึ่งต่อไปจะเรียกโดเมนของสมการนี้ว่า t-domain ตามความนิยม อาจเพราะสมการถูกหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร t อย่างไรก็ตาม นศ อาจเรียกเป็นชื่ออื่นก็ได้ เช่น x-domain หากเห็นว่าสมการถูกหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x) ให้เป็น “สมการพีชคณิต” (ซึ่งต่อไปจะเรียกโดเมนของสมการนี้ว่า s-domain ตามความนิยมเช่นกัน) โดยอาศัยตัวดำเนินการลาปลาซ (Laplace operator: L) หลังจากนั้นจึงทำการแก้สมการพีชคณิตให้ได้คำตอบบน s-domain แต่เนื่องจากปัญหาจริงๆ อยู่บน t-domain ดังนั้นจึงต้องแปลงคำตอบบน s-domain ให้ไปเป็นคำตอบบน t-domain โดยอาศัยการดำเนินการลาปลาซผกผัน (Inverse Laplace transform: L^{-1})

ตัวอย่างความสัมพันธ์การแปลงลาปลาซของบางฟังก์ชันที่สำคัญแสดงในตารางที่ 5.1 และตารางในภาคผนวก รายละเอียดของกระบวนการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแปลงลาปลาซแสดงในรูปที่ 5.1

จากตาราง f(t) เป็นฟังก์ชันของสมการอนุพันธ์สามัญซึ่งอยู่บน t-domain ส่วน F(s) เป็นฟังก์ชันพีชคณิตซึ่งอยู่บน s-domain การแปลงจาก f(t) ไปเป็น F(s) จึงเป็นการดำเนินการลาปลาซ ส่วนการแปลงจาก F(s) ไปเป็น f(t) เป็นการดำเนินการแบบลาปลาซผกผัน



รูปที่ 5.1 กระบวนการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ

5.2 ความสัมพันธ์การแปลงลาปลาซ

ตารางที่ 5.1 ตัวอย่างความสัมพันธ์การแปลงลาปลาซ

ลำดับที่	$F(s) = L\{f(t)\}$	$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{c}{s}$	c
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n ; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
4	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
5	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
6	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
7	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
8	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
9	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$t\sin(at)$

10	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos(at)$
11	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$t^n e^{at}$

<u>ตัวอย่างที่ 5.1</u> กำหนด $f(t)=\frac{1}{3}(e^{4t}-e^{t})$ จงหา F(s)

<u>วิธีทำ</u> $F(s)=L[f(t)]=L\left[\frac{1}{3}(e^{4t}-e^{t})\right]=\frac{1}{3}\left[L(e^{4t})-L(e^{t})\right]$

เทียบรูปแบบกับในตารางสัมพันธ์การแปลงลาปลาซจะได้ว่า

$$L(e^{4t})=\frac{1}{s-4} \qquad \text{และ} \qquad L(e^{t})=\frac{1}{s-1}$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$F(s)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-4}-\frac{1}{s-1}\right)=\frac{1}{(s-4)(s-1)}$$

<u>ตัวอย่างที่ 5.2</u> กำหนด $f(t)=e^{-t}(\cos 3t+4\sin 3t)$ จงหา F(s)

<u>วิธีทำ</u> กระจายพจน์ได้เป็น $f(t)=e^{-t}\cos 3t+4e^{-t}\sin 3t$

$$F(s)=L[f(t)]=L\left[e^{-t}\cos 3t+4e^{-t}\sin 3t\right]=L(e^{-t}\cos 3t)+4L(e^{-t}\sin 3t)$$

เทียบรูปแบบกับในตารางสัมพันธ์การแปลงลาปลาซจะได้ว่า

$$L(e^{-t}\cos 3t)=\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} \quad \text{และ} \quad L(e^{-t}\sin 3t)=\frac{3}{(s+1)^2+3^2}$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$F(s)=\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}+4\frac{3}{(s+1)^2+3^2}=\frac{(s+1)+4\times 3}{(s+1)^2+3^2}=\frac{s+13}{s^2+2s+10}$$

<u>ตัวอย่างที่ 5.3</u> กำหนด $F(s)=\frac{3s}{s^2+2s-8}$ จงหา f(t)

<u>วิธีทำ</u> ทำการแยกเศษส่วนย่อยของ F(s) ได้เป็นดังนี้

$$\frac{3s}{s^2+2s-8}=\frac{3s}{(s+4)(s-2)}=\frac{A}{(s+4)}+\frac{B}{(s-2)}$$

คูณตลอดสมการด้วย $(s+4)(s-2)$ จะได้

$$3s+0=A(s-2)+B(s+4)=(A+B)s+(-2A+4B)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของสมการจะได้

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 3 \\ -2A + 4B &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 2 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้นจึงได้ $F(s) = \dfrac{2}{(s+4)} + \dfrac{1}{(s-2)}$

หา f(t) ได้โดยใช้การดำเนินการลาปลาซผกผันดังนี้

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{2}{(s+4)} + \frac{1}{(s-2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{2}{(s+4)}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)}\right]$$

เทียบรูปแบบกับในตารางสัมพันธ์การแปลงลาปลาซผกผันจะได้ว่า

$$L^{-1}\left[\frac{2}{(s+4)}\right] = 2e^{-4t} \quad \text{และ} \quad L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)}\right] = e^{2t}$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$f(t) = 2e^{-4t} + e^{-2t}$$

<u>ตัวอย่างที่ 5.4</u> กำหนด $F(s) = \dfrac{-4s-10}{s^2+6s+9}$ จงหา f(t)

<u>วิธีทำ</u> จัดรูปของ F(s) ใหม่ได้เป็นดังนี้

$$\frac{-4s-10}{s^2+6s+9} = \frac{-4s-10}{(s+3)^2} = -\frac{4s}{(s+3)^2} - \frac{10}{(s+3)^2}$$

หา f(t) ได้โดยใช้การดำเนินการลาปลาซผกผันดังนี้

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[-\frac{4s}{(s+3)^2} - \frac{10}{(s+3)^2}\right]$$

$$= -4L^{-1}\left[\frac{s}{(s+3)^2}\right] - 10L^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2}\right]$$

เทียบรูปแบบกับในตารางสัมพันธ์การแปลงลาปลาซผกผันจะได้ว่า

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s+3)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{s}{(s-(-3))^2}\right] = [1+(-3)t]e^{(-3)t} = (1-3t)e^{-3t}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1!}{(s-(-3))^{1+1}}\right] = t^1e^{(-3)t} = te^{-3t}$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$f(t) = -4(1-3t)e^{-3t} - 10te^{-3t}$$

$$= (12te^{-3t} - 4e^{-3t}) - 10te^{-3t} = 2te^{-3t} - 4e^{-3t}$$

5.3 การแก้สมการอนุพันธ์สามัญด้วยการแปลงลาปลาซ

5.3.1 ความสัมพันธ์ของการแปลงลาปลาซกับอนุพันธ์

กำหนดฟังก์ชัน f(t) ในรูปอนุพันธ์สามัญแบบเชิงเส้นบน t-domain (นิยมเขียนด้วยอักษรตัวพิมพ์เล็ก) สามารถแปลงให้เป็นฟังก์ชัน F(s) บน s-domain (นิยมเขียนด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่) โดยอาศัยหลักการแปลงลาปลาซตามความสัมพันธ์ได้เป็นดังนี้

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0) \tag{5.1a}$$

$$L[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{5.1b}$$

$$L[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \tag{5.1c}$$

เมื่อ f', f'' และ $f^{(n)}$ เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่ง อันดับสอง และอันดับ n ตามลำดับ ส่วน $f(0)$ และ $f'(0)$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาที่ต้องแก้

5.3.2 ขั้นตอนการแก้สมการอนุพันธ์ด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ

เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจง่าย วิธีที่นำเสนอต่อไปนี้จะสอดคล้องกับ 3 ขั้นตอนหลักที่แสดงไว้ในรูปที่ 5.1 พิจารณาสมการอนุพันธ์สามัญแบบเชิงเส้นอันดับสองรูปแบบทั่วไป ดังนี้

$$a\frac{d^2f(t)}{dt^2} + b\frac{df(t)}{dt} + cf(t) = u(t) \quad \text{หรือ} \quad af'' + bf' + cf = u(t) \tag{5.2}$$

เมื่อ a, b, และ c เป็นค่าคงที่ u(t) และ f(t) เป็นฟังก์ชันบน t-domain และ t เป็นตัวแปรอิสระ สมการดังกล่าวมีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $f(0) = f_0$ และ $f'(0) = f_0'$ การแก้สมการโดยอาศัยหลักการแปลงลาปลาซมีขั้นตอนเป็นดังนี้

ขั้นตอนที่ 1: ทำการแปลงสมการ f(t) ไปเป็น F(s) โดยใช้การดำเนินการลาปลาซในรูป $F(s) = L[f(t)]$ ดังนี้

$$L[af''+b'+cf=u(t)] \tag{5.3}$$

$$aL(f'')+bL(f')+cL(f)=L(u(t)) \tag{5.4}$$

ประยุกต์รูปแบบลาปลาซสำหรับอนุพันธ์ตามสมการที่ (5.1) ได้เป็นดังนี้

$$a[s^2F(s)-sf(0)-f'(0)]+b[sF(s)-f(0)]+cF(s)=U(s) \tag{5.5}$$

นักศึกษาจะเห็นได้ว่าผลที่ได้จากการแปลงจะอยู่ในรูปพีชคณิต ซึ่งมีเฉพาะการดำเนินการแบบ $+, -, \times, \div$ เท่านั้น โดยมี F(s) เป็นตัวแปรของสมการ

ขั้นตอนที่ 2: แก้สมการเพื่อหาคำตอบ F(s) โดยเริ่มจากจัดรูปสมการและแทนค่าเงื่อนไข $f(0)=f_0$ และ $f'(0)=f'_0$ ได้เป็นดังนี้

$$(as^2+bs+c)F(s)=U(s)+(as+b)f_0+af'_0 \tag{5.6}$$

แก้สมการหาคำตอบได้เป็น

$$F(s)=\frac{U(s)+(as+b)f_0+af'_0}{as^2+bs+c} \tag{5.7}$$

นักศึกษาคงสังเกตเห็นได้ว่าการแก้สมการพีชคณิตทำได้ง่ายทีเดียว เพราะเป็นเพียงการจัดรูปแล้วย้ายข้างสมการมาหารกัน

ขั้นตอนที่ 3: เนื่องจากปัญหาที่แก้และคำตอบที่ต้องการ คือ f(t) ไม่ใช่ F(s) ดังนั้นจึงต้องแปลงคำตอบ F(s) ให้ไปเป็น f(t) โดยอาศัยการดำเนินการลาปลาซผกผันในรูป $f(t)=L^{-1}[F(s)]$ ดังนี้

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{U(s)+(as+b)f_0+af'_0}{as^2+bs+c}\right] \tag{5.8}$$

ในขั้นตอนนี้มีเทคนิกหนึ่งที่มักถูกนำมาประยุกต์ใช้ คือ การแยกเศษสัดย่อย (partial fraction) เพื่อจัดรูปแบบของ F(s) ให้สอดคล้องและเทียบได้กับรูปแบบในตารางการแปลงลาปลาซ

<u>ตัวอย่าง 5.5</u> จงแก้สมการ $f''+2f'-8f=0$ เมื่อ $f(0)=0$ และ $f'(0)=6$

<u>วิธีทำ</u> *ขั้นตอนที่ 1:* แปลงสมการ f(t) ให้ไปเป็น F(s) ดังนี้

$$L[f''+2f'-8f=0]$$
$$L(f'')+L(2f')-L(8f)=L(0)$$
$$\left[s^2F(s)-sf(0)-f'(0)\right]+2[sF(s)-f(0)]-8F(s)=0$$

ขั้นตอนที่ 2: แก้สมการหาคำตอบ F(s) โดยแทนค่าเงื่อนไข $f(0)=0$ และ $f'(0)=6$ ลงในสมการจะได้เป็น

$$s^2F(s)+2sF(s)-8F(s)-6=0$$
$$F(s)=\frac{6}{s^2+2s-8}$$

ขั้นตอนที่ 3: ใช้เทคนิกแยกเศษส่วนย่อยจัดรูปแบบ F(s) ให้เหมาะสมได้เป็น

$$F(s)=\frac{6}{(s+4)(s-2)}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+4}$$

จัดรูปแบบพจน์คำตอบเทียบกับในตารางโดย

$\frac{1}{s-2}$ และ $\frac{1}{s+4}$ เทียบรูปแบบได้กับ $\frac{1}{s-a}$

หาคำตอบ f(t) โดยการแปลงลาปลาซผกผัน $f(t)=L^{-1}[F(s)]$ ได้เป็น

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s-(-4)}\right]=e^{2t}-e^{-4t}$$

<u>ตัวอย่าง 5.6</u> จงแก้สมการ $y''+6y+9y=0$ เมื่อ $y(0)=-4$ และ $y'(0)=14$

<u>วิธีทำ</u> *ขั้นตอนที่ 1:* แปลงสมการ f(t) ให้ไปเป็น F(s) ได้ดังนี้

$$L[y''+6y+9y=0]$$
$$L[y'']+L[6y]+L[9y]=L[0]$$
$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+6[sY(s)-y(0)]+9Y(s)=0$$

ขั้นตอนที่ 2: แก้สมการหาคำตอบ F(s) และแทนเงื่อนไขขอบได้ดังนี้

$$(s^2+6s+9)Y(s) = (s+6)\underbrace{y(0)}_{-4}+\underbrace{y'(0)}_{14} = -4s-10$$

$$Y(s) = \frac{-4s-10}{s^2+6s+9}$$

ขั้นตอนที่ 3: จัดรูปแบบพจร์ของ F(s) ให้เหมาะสมได้เป็น

$$Y(s) = \frac{-4s-10}{(s+3)^2} = -\frac{4s}{(s+3)^2} - \frac{10}{(s+3)^2}$$

จัดรูปแบบพจน์คำตอบเทียบกับในตาราง

$$\frac{4s}{(s+3)^2} = 4\frac{s}{(s-(-3))^2} \quad \text{(เทียบรูปแบบกับ } \frac{s}{(s-a)^2}\text{)}$$

$$\frac{10}{(s+3)^2} = 10\frac{(2-1)!}{(s-(-3))^2} \quad \text{(เทียบรูปแบบกับ } \frac{(n-1)!}{(s-a)^n}\text{)}$$

หาคำตอบ f(t) โดยการแปลงลาปลาซผกผัน $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ ได้เป็น

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = -4L^{-1}\left[\frac{s}{(s-(-3))^2}\right] - 10L^{-1}\left[\frac{(2-1)!}{(s-(-3))^2}\right]$$

$$= -4(1-3t)e^{-3t} - 10te^{-3t} = (2t-4)e^{-3t}$$

<u>ตัวอย่าง 5.7</u> จงแก้สมการ $f''+f=2t$ เมื่อ $f(\pi/4) = \pi/4$ และ $f'(\pi/4) = 2-\sqrt{2}$

<u>วิธีทำ</u> *ขั้นตอนที่ 1:* แปลงสมการ f(t) ให้ไปเป็น F(s) ได้ดังนี้

$$L[f''+f=2t]$$

$$L(f'')+L(f) = L(2t)$$

$$\left[s^2F(s)-sf(0)-f'(0)\right]+F(s) = \frac{2}{s^2}$$

ขั้นตอนที่ 2: แก้สมการหาคำตอบ F(s) ได้ดังนี้

$$(s^2+1)F(s)-sf(0)-f'(0) = \frac{2}{s^2}$$

$$F(s) = \frac{2}{s^2(s^2+1)} + f(0)\frac{s}{(s^2+1)} + f'(0)\frac{1}{(s^2+1)}$$

$$= 2\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{(s^2+1)}\right] + f(0)\frac{s}{(s^2+1)} + f'(0)\frac{1}{(s^2+1)}$$

เมื่อ f(0) และ f′(0) เป็นค่าคงที่ซึ่งยังไม่รู้ค่า

ขั้นตอนที่ 3: หาคำตอบ f(t) โดยการแปลงลาปลาซผกผัน $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ ดังนี้

$$f(t) = 2L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - 2L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)}\right] + f(0)L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)}\right] + f'(0)L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)}\right]$$

เทียบความสัมพันธ์การแปลงในตาราง จะได้รูปคำตอบเป็นดังนี้

$$f(t) = 2t - 2\sin t + f(0)\cos t + f'(0)\sin t$$

$$= 2t + \underbrace{f(0)}_{A}\cos t + \underbrace{(f'(0) - 2)}_{B}\sin t \qquad \text{(a)}$$

$$f'(t) = 2 - A\sin t + B\cos t \qquad \text{(b)}$$

แทนเงื่อนไข $f(\pi/4) = \pi/4$ ในสมการ (a) ได้เป็น

$$\frac{\pi}{2} = 2(\pi/4) + A\underbrace{\cos(\pi/4)}_{1/\sqrt{2}} + B\underbrace{\sin(\pi/4)}_{1/\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad A + B = 0 \qquad \text{(c)}$$

แทนเงื่อนไข $f'(\pi/4) = 2 - \sqrt{2}$ ในสมการ (b) ได้เป็น

$$2 - \sqrt{2} = 2 - A\sin(\pi/4) + B\cos(\pi/4) \quad \Rightarrow \quad A - B = 2 \qquad \text{(d)}$$

แก้สมการ (c) และ (d) ได้ A=1 และ B=-1 ดังนั้นจึงได้คำตอบเป็น

$$f(t) = 2t + \cos t - \sin t$$

<u>ตัวอย่าง 5.7</u> จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= \ \ y_1 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

<u>วิธีทำ</u> *ขั้นตอนที่ 1:* แปลงสมการ y(t) ให้ไปเป็น Y(s) ได้ดังนี้

$$L[y_1' = -y_2] \quad \Rightarrow \quad sY_1(s) - y_1(0) = -Y_2(s) \qquad \text{(a)}$$

$$L[y_2' = \ y_1] \quad \Rightarrow \quad sY_2(s) - y_2(0) = \ Y_1(s) \qquad \text{(b)}$$

ขั้นตอนที่ 2: แก้สมการโดยแทน $Y_1(s)$ จากสมการ (b) ลงในสมการ (a) ได้เป็น

$$s[sY_2(s) - y_2(0)] - y_1(0) = -Y_2(s)$$

แทนค่าเงื่อนไข $y_1(0) = 1$ และ $y_2(0) = 0$

$$s[sY_2(s) - 0] - 1 = -Y_2(s)$$

แก้สมการได้เป็น

$$s^2Y_2(s) - Y_2(s) = 1 \quad \text{หรือ} \quad Y_2(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

แทน $Y_2(s)$ ลงในสมการ (b) ได้เป็น

$$Y_1(s) = sY_2(s) - y_2(0) = s\left[\frac{1}{s^2 - 1}\right] - \underbrace{y_2(0)}_{=0} = \frac{s}{s^2 - 1}$$

ขั้นตอนที่ 3: หาคำตอบ y(t) โดยการแปลงลาปลาซผกผันดังนี้

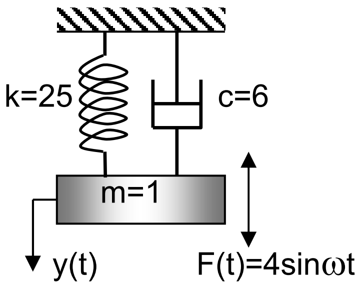
$$y_1(t)=L^{-1}[Y_1(s)]=L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-1}\right]=\cos t$$

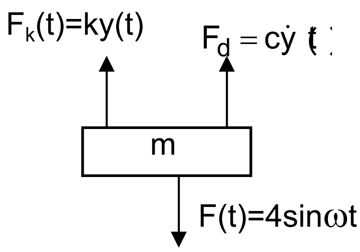
$$y_2(t)=L^{-1}[Y_2(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right]=\sin t$$

5.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้งาน

<u>ตัวอย่างที่ 5.8</u> (ปัญหาด้านกลศาสตร์การสั่นสะเทือน)

ระบบมวล-สปริง-แดมเปอร์ ติดตั้งเข้ากับแหล่งที่มีการสั่นแบบคาบขนาด F(t)=4sinωt ที่เวลา t=0 ดังแสดงในรูป จงคำนวณหาระยะการสั่น y(t) ของมวลที่เวลา t ใดๆ สำหรับกรณี ω=2 และ ω=5 เมื่อกำหนดให้ $y(0)=\dot{y}(0)=0$





จากรูปแรงสั่นสะเทือนกระทำกับระบบมวล m ซึ่งรองรับด้วยสปริงและแดมเปอร์ เขียนไดอะแกรมของแรงได้ดังรูปด้านขวา ดังนั้น จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของที่นิวตันจึงได้ว่า

$$\sum F = ma = m\dot{v}(t) = m\ddot{y}(t)$$

ดังนั้นจึงได้

$$m\ddot{y}(t)=F(t)-F_k(t)-F_d(t) \qquad \text{(a-1)}$$

แทนค่า m, F(t), $F_k(t)$ และ $F_d(t)$ ได้เป็นดังนี้

$$\ddot{y}(t)=4\sin\omega t-ky(t)-c\dot{y}(t)$$

หรือ $$\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+25y(t)=4\sin\omega t \qquad \text{(a-2)}$$

ดำเนินการแปลงลาปลาซได้เป็น

$$\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]+6[sY(s)-y(0)]+25Y(s)=\frac{4\omega}{s^2-\omega^2}$$

แทนค่าเงื่อนไข $y(0)=y'(0)=0$ และจัดรูปสมการได้เป็น

$$\left(s^2+6s+25\right)Y(s)=\frac{4\omega}{s^2-\omega^2} \qquad \text{(b-1)}$$

$$Y(s)=\frac{4\omega}{\left(s^2-\omega^2\right)\left(s^2+6s+25\right)} \qquad \text{(b-2)}$$

<u>กรณีที่ 1 ω=2</u> จะได้สมการเป็น

$$Y(s)=\frac{8}{\left(s^2-4\right)\left(s^2+6s+25\right)}$$

จัดรูปโดยใช้เทคนิกแยกสัดส่วนย่อยได้เป็น

$$Y(s)=\frac{4}{195}\frac{-4s+14}{\left(s^2+4\right)}+\frac{2}{195}\frac{8s+20}{\left(s^2+6s+25\right)}$$

$$=\frac{4}{195}\frac{-4s+14}{\left(s^2+4\right)}+\frac{2}{195}\frac{8(s+3)-4}{(s+3)^2+16} \qquad \text{(c)}$$

ดำเนินการแปลงลาปลาซผกผันเพื่อหาคำตอบ y(t) ได้เป็น

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\frac{4}{195}(7\sin 2t-4\cos 2t)+\frac{2}{195}e^{-3t}(8\cos 4t-\sin 4t)$$

<u>กรณีที่ 2 ω=5</u> จะได้สมการเป็น

$$Y(s)=\frac{20}{\left(s^2-25\right)\left(s^2+6s+25\right)} \qquad \text{(d-1)}$$

แยกสัดส่วนย่อยได้เป็น

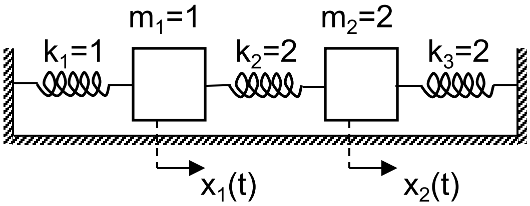
$$Y(s)=\frac{2}{15}\frac{-s}{\left(s^2+25\right)}+\frac{1}{15}\frac{2(s+3)+6}{(s+3)^2+16} \qquad \text{(d-2)}$$

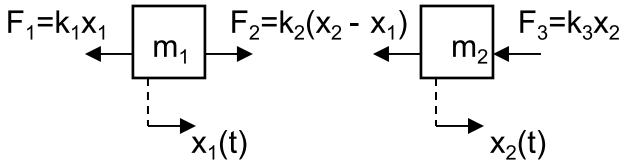
ดำเนินการแปลงลาปลาซผกผันเพื่อหาคำตอบ y(t) ได้เป็น

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=-\frac{2}{15}(\cos 5t)+\frac{1}{15}e^{-3t}(2\cos 4t+1.5\sin 4t)$$

<u>ตัวอย่างที่ 5.9</u> (ปัญหาด้านกลศาสตร์การสั่นสะเทือน)

กลไกประกอบด้วยมวล 2 ก้อนซึ่งถูกยึดติดกันด้วยสปริง ดังแสดงในรูป กำหนดให้ระบบเริ่มต้นจากสภาวะหยุดนิ่ง โดยมวล m_1 ถูกผลักมาทางด้านซ้ายเป็นระยะ 1 หน่วยจากตำแหน่งสมดุลของมัน ส่วนมวล m_2 ถูกผลักไปทางด้านขวาเป็นระยะ 2 หน่วยจากตำแหน่งสมดุลของมัน หากไม่พิจารณาความเสียดทานในระบบ จงคำนวณหาตำแหน่งของมวลทั้งสองก้อนที่เวลา t ใดๆ





<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $x_1(t)$ และ $x_2(t)$ เป็นระยะเคลื่อนตัวของมวล m_1 และ m_2 จากระยะสมดุลของตัวมันเอง ตามลำดับ ใช้กฎข้อที่ 2 ของนิวตันวิเคราะห์แรงและการเคลื่อนของมวลทั้งคู่ได้เป็นดังนี้

$$m\ddot{x}_1 = F_2 - F_1 = k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 \qquad \text{(a-1)}$$

$$m\ddot{x}_2 = -F_3 - F_2 = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) \qquad \text{(a-2)}$$

แทนค่าและจัดรูปสมการได้เป็นดังนี้

$$\ddot{x}_1 + 3x_1 - 2x_2 = 0 \qquad \text{(b-1)}$$

$$2\ddot{x}_2 + 4x_2 - 2x_1 = 0 \qquad \text{(b-2)}$$

ดำเนินการแปลงลาปลาซทั้ง 2 สมการได้เป็นดังนี้

$$\left[s^2X_1(s) - sx_1(0) - x_1'(0)\right] + 3X_1(s) - 2X_2(s) = 0 \qquad \text{(c-1)}$$

$$2\left[s^2X_2(s) - sx_2(0) - x_2'(0)\right] + 4X_2(s) - 2X_1(s) = 0 \qquad \text{(c-2)}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบคือมวล m_1 ถูกผลักไปทางซ้าย 1 หน่วย และมวล m_2 ถูกผลักไปทางขวา 2 หน่วย จึงได้ว่า $x_1(0) = -1$ และ $x_2(0) = 2$ และระบบเริ่มต้นจากหยุดนิ่ง ความเร็วเริ่มต้นของมวลทั้งสองก้อนจึงเป็นศูนย์ ดังนั้น $x_1'(0) = x_2'(0) = 0$ สมการ (c) จึงจัดรูปได้เป็น

$$(s^2 + 3)X_1(s) - 2X_2(s) = -s \qquad \text{(d-1)}$$

$$-X_1(s) + (s^2 + 2)X_2(s) = 2s \qquad \text{(d-2)}$$

จากสมการ (d-2) จึงได้ $X_1(s) = (s^2 + 2)X_2(s) - 2s$ แทนในสมการ (d-1) ได้เป็นดังนี้

$$(s^2+3)[(s^2+2)X_2(s)-2s]-2X_2(s)=-s \qquad \text{(e-1)}$$

$$X_2(s)=\frac{2s^3+5s}{(s^2+3)(s^2+2)-2}=\frac{2s^3+5s}{s^4+5s^2+4}=\frac{2s^3+5s}{(s^2+4)(s^2+1)} \qquad \text{(e-2)}$$

แยกส่วนประกอบย่อยได้เป็นดังนี้

$$X_2(s)=\frac{2s^3+5s}{(s^2+4)(s^2+1)}=\frac{s}{(s^2+4)}+\frac{s}{(s^2+1)} \qquad \text{(f)}$$

ดำเนินการแปลงลาปลาซผกผันเพื่อหาคำตอบ $x_2(t)$ ได้ดังนี้

$$x_2(t)=L^{-1}[X_2(s)]=\cos t+\cos 2t \qquad \text{(g)}$$

นำ $x_2(t)$ เข้าแทนแก้สมการ (b-2) ได้ $x_1(t)=2x_2(t)+\ddot{x}_2(t)$

$$x_1(t)=2(\cos t+\cos 2t)+(-\cos t-4\cos 2t)$$
$$=\cos t-2\cos 2t$$

ดังนั้นระยะเคลื่อนตัวของมวล m_1 และ m_2 เป็นตามลำดับ ดังนี้

$$x_1(t)=\cos t-2\cos 2t$$

$$x_2(t)=\cos t+\cos 2t$$

5.5 การแยกสัดส่วนย่อย (Partial Fraction)

5.3.1 *กรณีรากไม่ซ้ำ (Unrepeated root)* การจัดรูปทำได้โดยแยกแต่ละส่วนออกจากกัน ตัวอย่างเช่น

$$\frac{s+1}{s(s-2)(s+3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s-2)}+\frac{C}{(s+3)}$$

นำส่วนคือ $s(s-2)(s+3)$ คูณตลอดสมการจะได้

$$s+1=A(s-2)(s+3)+Bs(s+3)+Cs(s-2)$$
$$=A(s^2+s-6)+B(s^2+3s)+C(s^2-2s)$$

จดรูปสมการได้เป็น

$$(0)s^2+(1)s+1=(A+B+C)s^2+(A+3B-2C)s-6A$$

เทียบสัมประสิทธิ์ด้านซ้ายและด้านขวาของสมการ จะได้ว่า

$$0=A+B+C \qquad \text{(a)}$$

$$1=A+3B-2C \qquad \text{(b)}$$

$$1=-6A \qquad \text{(c)}$$

แก้สมการ (a) ถึง (c) ได้ค่า A = -1/6, B = 3/10, C = -2/15 ดังนั้นจึงได้

$$\frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = -\frac{1}{6s} + \frac{3}{10(s-2)} - \frac{2}{15(s+3)}$$

5.3.2 *กรณีรากซ้ำ (Repeated root)* เป็นกรณีที่บางพจน์ของส่วนหารมีการยกกำลังมากกว่ากำลัง 1 เช่น พจน์ s^2 ที่ถือเป็นรากซ้ำ

$$\frac{s^3-4s+4}{s^2(s-2)(s-1)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{(s-2)} + \frac{D}{(s-1)}$$

นำส่วนคือ $s^2(s-2)(s-1)$ คูณตลอดสมการจะได้

$$s^3-4s+4 = As(s-2)(s-1) + B(s-2)(s-1) + Cs^2(s-1) + Ds^2(s-2)$$

$$= A(s^3-3s^2+2s) + B(s^2-3s+2) + C(s^3-s^2) + D(s^3-2s^2)$$

จดรูปสมการได้เป็น

$$(1)s^3 + (0)s^2 + (-4)s + 4 = (A+C+D)s^3 + (-3A+B-C-2D)s^2 + (2A-3B)s + 2B$$

เทียบสัมประสิทธิ์ด้านซ้ายและด้านขวาของสมการ จะได้ว่า

$1 = A+C+D$ (a)

$0 = -3A+B-C-2D$ (b)

$-4 = 2A-3B$ (c)

$4 = 2B$ (d)

แก้สมการ (a) ถึง (d) ได้ค่า A = 1, B = 2, C = 1 และ D = -1 ดังนั้นจึงได้

$$\frac{s^3-4s+4}{s^2(s-2)(s-1)} = \frac{s+2}{s^2} + \frac{1}{(s-2)} - \frac{1}{(s-1)}$$

การบ้านบทที่ 5

1. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน (inverse Laplace transform)

1.1) $\dfrac{1}{(s-4)(s-1)}$ [*Ans*: $\frac{1}{3}(e^{4t}-e^{t})$]

1.2) $\dfrac{3s}{s^2+2s-8}$ [*Ans*: $2e^{-4t}+e^{2t}$]

1.3) $\dfrac{s+13}{s^2+2s-10}$ [*Ans*: $e^{-t}(\cos 3t+4\sin 3t)$]

1.4) $\dfrac{s^2-6s+4}{s^3-3s^2+2s}$ [*Ans*: $2+e^{t}-2e^{2t}$]

1.5) $\dfrac{10-4s}{(s-2)^2}$ [*Ans*: $e^{2t}(2t-4)$]

1.6) $\dfrac{s^2+s-2}{(s+1)^3}$ [*Ans*: $e^{-t}(1-t-t^2)$]

1.7) $\dfrac{-2s^3+26s}{s^4-10s^2+9}$ [*Ans*: $\cosh 3t-3\cosh t$]

1.8) $\dfrac{2s^2-3s}{(s-2)(s-1)^2}$ [*Ans*: $e^{-t}(\cos 2t-2t\sin 2t)$]

2. จงแก้สมการต่อไปนี้โดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซ

2.1) $y''+4y=0;\quad y(0)=2,\ y'(0)=-8$

[*Ans*: $y=2\cos 2t-4\sin 2t$]

2.2) $y''+\omega^2 y=0;\quad y(0)=A,\ y'(0)=B$

[*Ans*: $y=A\cos\omega t+(B/\omega)\sin\omega t$]

2.3) $y''+25y=t;\quad y(0)=1,\ y'(0)=0.04$

[*Ans*: $y=\cos 5t+t/25$]

2.4) $y''+ky'-2k^2y=0;\quad y(0)=2,\ y'(0)=2k$

[*Ans*: $y=2e^{kt}$]

3. จงแก้สมการต่อไปนี้โดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซ

3.1) $4y''+\pi^2 y=0;\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$

3.2) $y'' + 2y' - 8y = 0; \qquad y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0$

3.3) $y'' - 4y' + 3y = 2t - 8/3; \qquad y(0) = 0, \ \ y'(0) = -16/3$

3.4) $y'' + 4y' = 1 - 2t; \qquad y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0$

3.5) $y'' + \pi^2 y = t^3; \qquad y(0) = 6/\pi^4, \ \ y'(0) = 0$

4. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซ

4.1) $\left.\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 - y_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 0 \end{aligned}$

4.1) $\left.\begin{aligned} y_1'' &= y_1 + 3y_2 \\ y_2'' &= 4y_1 - 4e^t \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y_1(0) &= 2, \ \ y_1'(0) = 3 \\ y_2(0) &= 1, \ \ y_2'(0) = 2 \end{aligned}$